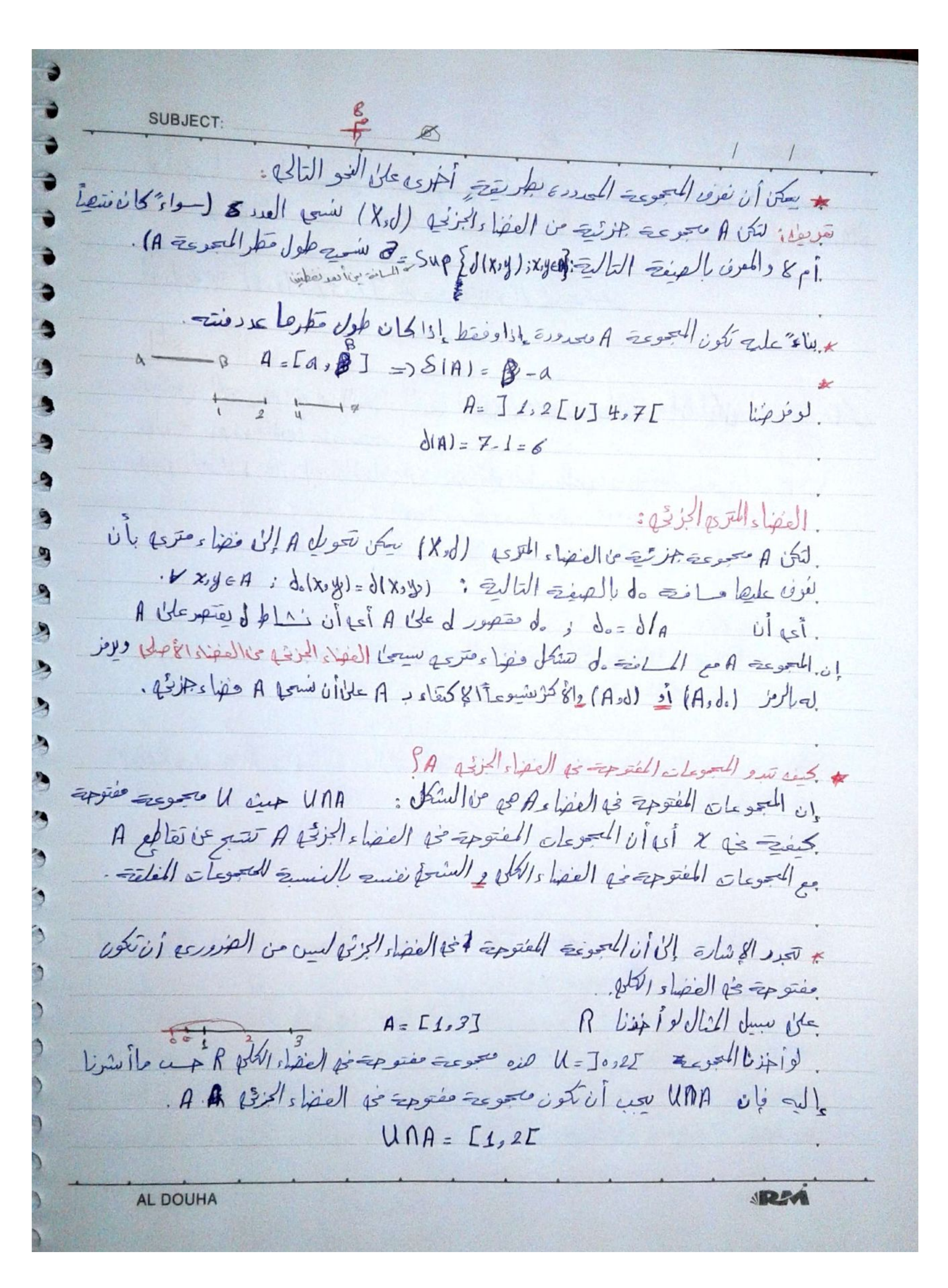


SUBJECT:

* يمكن أن نعرف المجموعة المحدودة بطريقة أخرى على النحو التالي :

تعريف: لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء الجزئي (X,d) نسمي العدد δ (سواءً كان منتهياً أم ∞) والمعرف بالصيغة التالية: $\delta = \sup\{d(x,y) ; x,y \in A\}$ (المسافة بين أبعد نقطتين) نسميه طول قطر المجموعة A.

* بناءً عليه تكون المجموعة A محدودة إذا وفقط إذا كان طول قطرها عدد منته.

$A = [a,b] \Rightarrow \delta(A) = b - a$

* لو فرضنا $A =]1,2[\cup]4,7[$

$\delta(A) = 7 - 1 = 6$

الفضاء المتري الجزئي:

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (X,d) يمكن تحويل A إلى فضاء متري بأن نعرف عليها مسافة d_0 بالصيغة التالية: $d_0(x,y) = d(x,y) \; ; \; \forall x,y \in A$.

أي أن $d_0 = d/_A$ و d_0 مقصور d على A أي أن نشاط d يقتصر على A

إن المجموعة A مع المسافة d_0 تشكل فضاء متري يسمى الفضاء الجزئي من الفضاء الأصلي ويرمز له بالرمز (A,d_0) أو (A,d) والأكثر شيوعاً الاكتفاء بـ A على أن نسمي A فضاء جزئي.

* كيف تبدو المجموعات المفتوحة في الفضاء الجزئي A؟

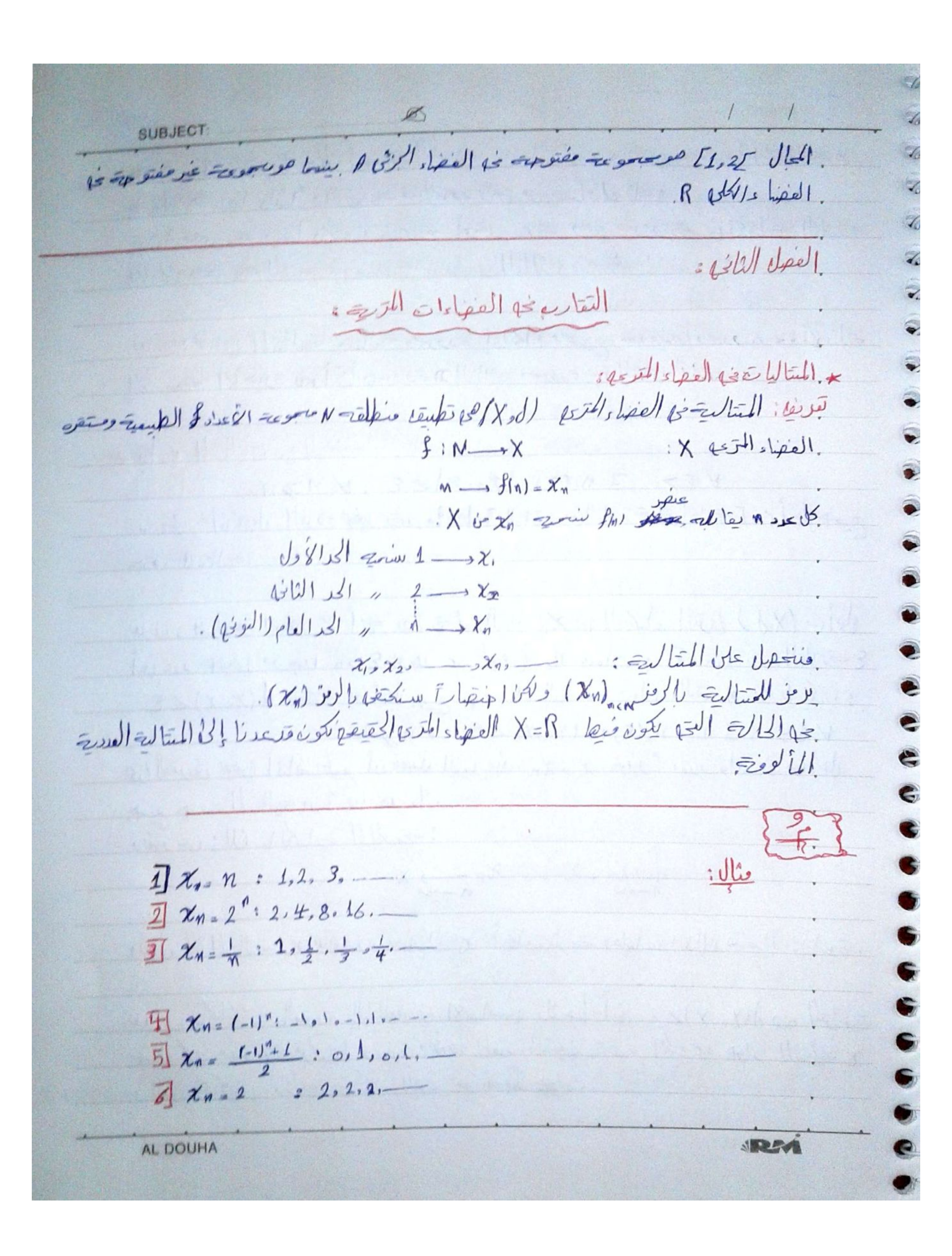
إن المجموعات المفتوحة في الفضاء A هي من الشكل: $U \cap A$ حيث U مجموعة مفتوحة كيفية في X أي أن المجموعات المفتوحة في الفضاء الجزئي A تنتج عن تقاطع A مع المجموعات المفتوحة في الفضاء الكلي و الشيء نفسه بالنسبة للمجموعات المغلقة.

* تجدر الإشارة إلى أن المجموعة المفتوحة في الفضاء الجزئي ليس من الضروري أن تكون مفتوحة في الفضاء الكلي.

على سبيل المثال لو أخذنا R $A = [1,3]$

لو أخذنا المجموعة $U =]0,2[$ هذه مجموعة مفتوحة في الفضاء الكلي R حسب ما أشرنا إليه فإن $U \cap A$ يجب أن تكون مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي A.

$U \cap A = [1,2[$



المجال $[1,2[$ هو مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي A بينما هو مجموعة غير مفتوحة في الفضاء الكلي R.

الفصل الثاني:

التقارب في الفضاءات المترية:

★ المتتاليات في الفضاء المتري:

تعريف: المتتالية في الفضاء المتري (X,d) هي تطبيق منطلقه N مجموعة الأعداد الطبيعية ومستقره الفضاء المتري X:

$$f : N \longrightarrow X$$

$$n \longrightarrow f(n) = x_n$$

كل عدد n يقابله عنصر $f(n)$ نسميه x_n من X.

$1 \longrightarrow x_1$ نسميه الحد الأول

$2 \longrightarrow x_2$ " الحد الثاني

$n \longrightarrow x_n$ " الحد العام (النوني).

فنتحصل على المتتالية: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

يرمز للمتتالية بالرمز $(x_n)_{n\in N}$ ولكن اختصاراً سنكتفي بالرمز (x_n).

في الحالة التي يكون فيها $X=R$ الفضاء المتري الحقيقي نكون قد عدنا إلى المتتالية العددية المألوفة.

مثال:

1] $x_n = n$: $1, 2, 3, \ldots$

2] $x_n = 2^n$: $2, 4, 8, 16, \ldots$

3] $x_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

4] $x_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, \ldots$

5] $x_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}$: $0, 1, 0, 1, \ldots$

6] $x_n = 2$: $2, 2, 2, \ldots$

من هذه الأمثلة نلاحظ أنه يجب التفريق بين المتتالية ومجموعة قيمها المتتالية عبارة عن نهائية فيها دائماً والانهاية من الحدود وهي مرتبة أول ثاني ......

بينما مجموعة قيمها قد تكون منتهية أو غير منتهية وهي غير مرتبة في الأمثلة الثلاثة الأولى مجموعة القيم غير منتهية بينما في الثالثة منتهية.

تعريف: تسمى المتتالية متتالية محدودة إذا كان مجموع قيمها محدودة في الأمثلة الأربعة الأخيرة نجد أنها محدودة « الثالثة محدودة بين الصفر والواحد ».

★ تقارب المتتاليات في الفضاء المتري:

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists \; n_0(\varepsilon) : |x_n - x| < \varepsilon \; ; \; \forall n \geq n_0$$

نستطيع أن نجعل الفرق صغير بقدر ما نشاء [الفائدة من العلاقة الرياضية] من أجل جميع حدود المتتالية.

تعريف: نقول عن العنصر x أنه نهاية المتتالية x_n في الفضاء المتري (X,d) من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي n_0 متعلق بـ ε بحيث تكون العلاقة $d(x_n, x) < \varepsilon$ محققة من أجل جميع حدود المتتالية بدءً من الحد بالرقم n_0 رمزياً نكتب:

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists \; n_0 = n_0(\varepsilon) : d(x_n, x) < \varepsilon \; ; \; \forall n \geq n_0$$

هذا التعريف يعني أننا نستطيع أن نجعل البعد بين x_n و x صغيراً بقدر ما نشاء من أجل جميع حدود المتتالية بدءً من حدٍ ما.

ونعبر عن ذلك بالكتابة المألوفة:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \; ; \quad x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$$

ونقول أن المتتالية x_n تنتهي وتسعى إلى x أنها متقاربة وفيما عدا ذلك تسمى متباعدة.

تعريف مكافئ: بالعودة إلى التعريف الأساسي نلاحظ أن $d(x_n, x) < \varepsilon$ هذه المتراجحة تمثل كرة مفتوحة مركزها x ونصف قطرها العدد الكيفي ε هذه الكرة هي جوار للنقطة x والعدد ε كيفي وما يحوي هذه الكرة هو أيضاً جوار.

تكون المتتالية x_n متقاربة من العنصر x إذا وفقط إذا كان أي جوار للنقطة x يحوي
جميع حدود المتتالية بدءً من حدٍ ما.
أو يحوي جميع حدود المتتالية باستثناء عدد منتهٍ منها.
بشكل مماثل لما هو موجود في التحليل الرياضي يبرهن:
1- للمتتالية المتقاربة نهاية وحيدة.
2- المتتالية المتقاربة محدودة (والعكس غير صحيح).

مبرهنة: ليكن (X,d) فضاء متري و $A \subseteq X$ (مجموعة جزئية) و $x \in X$ (نقطة) تكون النقطة x نقطة تراكم للمجموعة A إذا وفقط إذا وجدت متتالية x_n من عناصر A المختلفة عن x (أي من عناصر $A \setminus \{x\}$) متقاربة من x.

البرهان:
1- لزوم الشرط: نفرض أن x نقطة تراكم لـ A وحسب التعريف هذا يعني أن أي جوار للنقطة x يتقاطع مع A بنقاط مختلفة عن x بحالة خاصة فإن أي كرة مفتوحة من الشكل $B(x,\frac{1}{n})$ تتقاطع مع A بنقاط مختلفة عن x

$$B(x,\tfrac{1}{n}) \cap A \setminus \{x\} \neq \varphi \qquad n=1,2,3,\ldots$$

عندما $n=1 \Rightarrow B(x,1) \cap A \setminus \{x\} \neq \varphi$
نختار نقطة من هذا التقاطع ونسميها x_1
عندما $n=2 \Rightarrow B(x,\frac{1}{2}) \cap A \setminus \{x\} \neq \varphi$
نختار عنصر من هذا التقاطع ونسميه x_2
ونتابع هذه العملية إلى ما لا نهاية
نسمي x_n ______ $B(x,\frac{1}{n}) \cap A \setminus \{x\} \neq \varphi$;
فنحصل على متتالية $x_1, x_2, \ldots, x_n$ وهذه المتتالية من عناصر A المختلفة عن النقطة x نفسها وهي متقاربة من x من طريقة بناؤها:

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

2- كفاية الشرط: لنفرض أنه توجد متتالية x_n متقاربة من x و $x_n \in A \setminus \{x\}$ وهي متقاربة من x.

بما أن x_n متقاربة من x فإن أي جوار لـ x يحوي جميع حدود المتتالية بدءً من حد ما وبالتالي يتقاطع مع $A\setminus\{x\}$ فإن x تكون نقطة تراكم.

ملاحظة: إذا كان x_n تتقارب من x نستطيع أن نحصل على متتالية عددية: $d(x_1,x) - d(x_2,x)$ $d(x_n,x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ فإنها متقاربة والعكس صحيح.

مبرهنة:
ليكن (X,d) فضاء متري و $A\subseteq X$ تكون النقطة x لاصقة للمجموعة A إذا وفقط إذا وجدت متتالية من عناصر A متقاربة من x.

البرهان:
لزوم الشرط: نفرض أن x نقطة لاصقة $x\in\bar{A}$ نميز حالتين: [1] $x\notin A$ عندها حسب تمرين سابق تكون x نقطة تراكم وحسب المبرهنة السابقة توجد متتالية x_n من عناصر $A\setminus\{x\}$ متقاربة من x ولكن $A\setminus\{x\}=A$ لأن $x\notin A$.

[2] $x\in A$ المطلوب إيجاد متتالية من عناصر A متقاربة من x وهي x, x, x, x ____

كفاية الشرط: $(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ من عناصر A. نفرض أنه يوجد متتالية من A متقاربة من x.
بما أن x نقطة تقارب (نهاية) فإن أي جوار للنقطة x يحوي جميع حدود المتتالية باستثناء عدد منتهي يتقاطع مع A أي أن x نقطة لاصقة لـ A.

نتيجة: تكون المجموعة A من الفضاء المتري (X,d) مجموعة مغلقة إذا وفقط إذا كانت أي متتالية متقاربة من عناصر A تتقارب إلى عنصر من A.

البرهان: لنفرض أن A مغلقة ولتكن x_n متتالية: $(x_n)\to x$ متقاربة من العنصر x وحسب المبرهنة السابقة فإن النقطة x من نقطة لاصقة بالمجموعة A وبما أن A مغلقة بالفرض فهي تحوي جميع نقاطها اللاصقة أي أن $x\in A$.

SUBJECT:

وبالعكس: لنفرض أن الشرط تحقق ولنأخذ نقطة x ملصقة كيفية بالمجموعة $\bar{A}$ و $x\in\bar{A}$
حسب المبرهنة السابقة أيضاً توجد متتالية: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ وحسب الفرض $\Leftarrow x\in A$
$\bar{A}$ تحوي جميع نقاطها اللاصقة و $\bar{A}\subseteq A$ فهي مغلقة.